wiskunde B 1,2

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 **06**

Tijdvak 2
Woensdag 21 juni
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 85 punten te behalen; het examen bestaat uit 18 vragen.
Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Voor de beantwoording van de vragen 10 en 12 is een uitwerkbijlage bijgevoegd.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Toename lichaamsgewicht zwangere vrouw

Een vrouwenarts heeft van een zwangere vrouw gedurende de zwangerschap allerlei gegevens verzameld. In tabel 1 staan enkele resultaten. Daaruit is onder andere af te lezen dat deze vrouw als ze 25 weken zwanger is, sinds het begin van de zwangerschap 3030 gram zwaarder is geworden.

tabel 1

Aantal weken zwanger	15	25	35	40
Toename lichaamsgewicht in gram (afgerond op tientallen)	1520	3030	5990	8400

Het verband tussen het aantal weken zwangerschap en de gewichtstoename van deze vrouw is vanaf de vijftiende week bij benadering exponentieel.

4p **1** ☐ Bereken de groeifactor per week van dit exponentiële verband.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

De gewichtstoename van een zwangere vrouw wordt voor een deel veroorzaakt door het gewicht van de ongeboren baby. Onderzoek toont aan dat vanaf week 20 dit gewicht elke week ongeveer evenveel toeneemt.
In tabel 2 zijn gewichten weergegeven van het ongeboren kind van de vrouw van wie de gewichtstoename in tabel 1 staat.

tabel 2

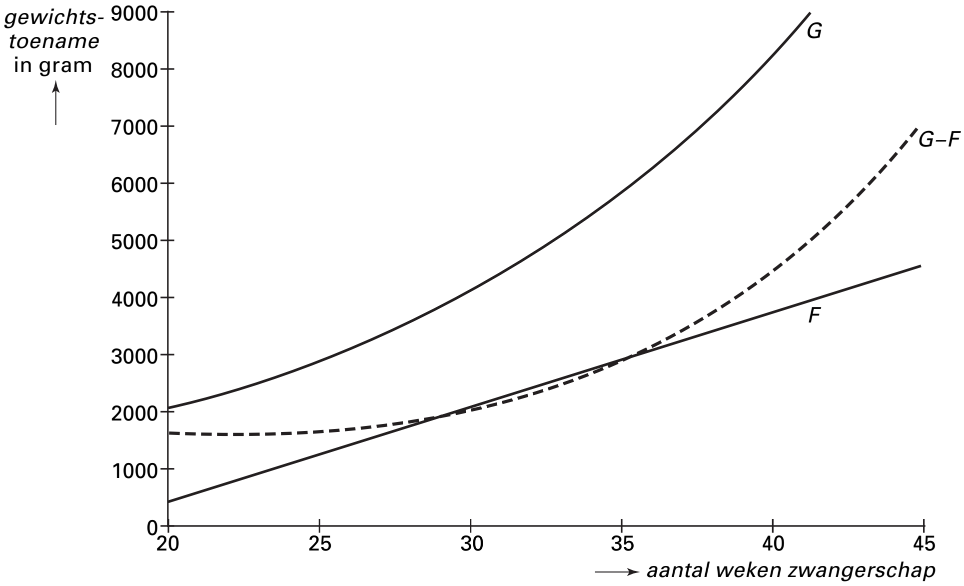
Aantal weken zwanger	20	25	35	40
Gewicht van het ongeboren kind in gram	523	1390	3120	3990

De formule $F = a \cdot t + b$ geeft bij benadering het verband weer tussen het gewicht van het ongeboren kind en de duur van de zwangerschap. Hierin is t de tijd in weken dat de vrouw zwanger is en F het gewicht van het ongeboren kind in gram.

4p **2** ☐ Bereken a en b met behulp van de gegevens in tabel 2.

Tijdens de zwangerschap van een andere vrouw zijn ook de gewichtstoename van de moeder en het gewicht van het ongeboren kind door de vrouwenarts bijgehouden. De gegevens zijn in formules verwerkt. De bijbehorende grafieken zijn in figuur 1 afgebeeld.

figuur 1



De formules die bij deze zwangerschap horen zijn: $G = 1450 \cdot 2^{0,1t-1,5}$ en $F = 165t - 2875$.
Hierin is t de duur van de zwangerschap in weken, G de gewichtstoename van de vrouw in gram en F het gewicht van het ongeboren kind in gram.
In figuur 1 is met een stippellijn de grafiek getekend van het verschil van G en F.

Aan het eind van de zwangerschap wordt er veel vocht opgeslagen. Ook neemt het gewicht van de vrouw toe door weefselvorming rond het ongeboren kind. Aan het eind van de zwangerschap kunnen G en F wel 4000 tot 8000 gram verschillen.

5p **3** □ Bereken met behulp van de gegeven formules op welke dag na het begin van de zwangerschap bij deze vrouw dit verschil voor het eerst meer dan 4000 gram is.

De grafiek van F en de verschilgrafiek snijden elkaar voor twee waarden van t. Op deze twee tijdstippen geldt dat G twee keer zo groot is als F.

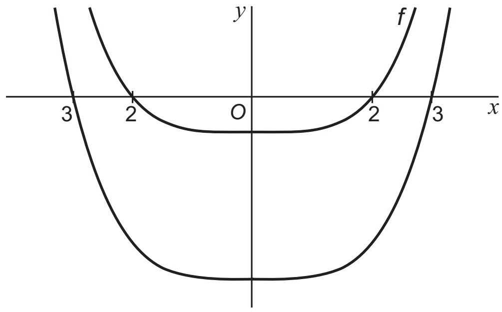
4p **4** □ Beredeneer dit zonder deze snijpunten met behulp van de formules uit te rekenen.

5p **5** □ Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van t de gewichtstoename G van de moeder en het gewicht F van het ongeboren kind even snel toenemen.

Functies

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$. Door de grafiek van f omlaag te schuiven veranderen de snijpunten met de x-as in de punten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.
In figuur 2 zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

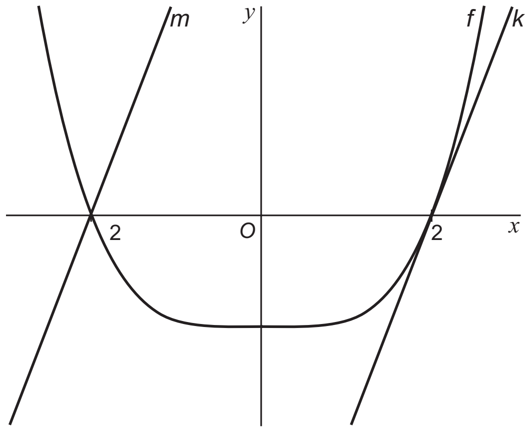
figuur 2



3p **6** ☐ Bereken over welke afstand de grafiek van f in deze situatie omlaag verschoven is.

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(2, 0)$ is de lijn k.
De lijn m gaat door het punt $(-2, 0)$ en is evenwijdig aan de lijn k (zie figuur 3).

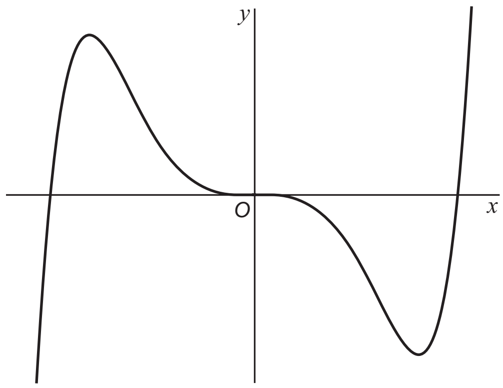
figuur 3



4p **7** ☐ Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de lijn m.

Door $f(x)$ met x^3 te vermenigvuldigen ontstaat de productfunctie $g(x) = x^3(x^4 - 16)$.
In figuur 4 is de grafiek van g getekend.

figuur 4

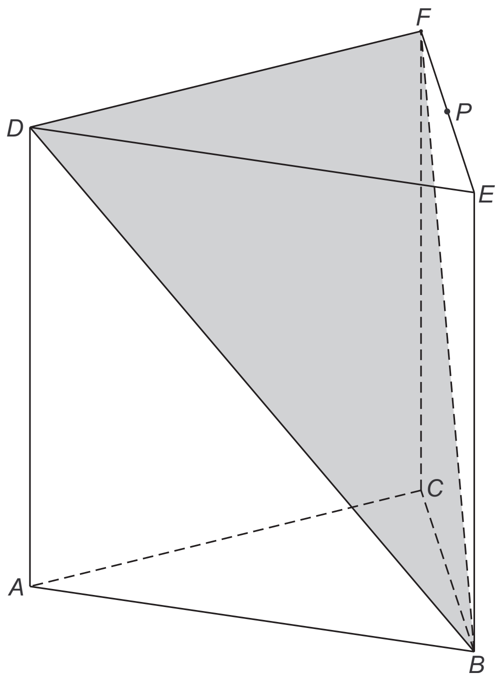


6p **8** ☐ Bereken exact de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van g.

Prisma

In figuur 5 is het prisma *ABC.DEF* getekend. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. De ribben *AD*, *BE* en *CF* staan loodrecht op de vlakken *ABC* en *DEF*. De driehoeken *ABC* en *DEF* zijn gelijkzijdig met zijden 6 cm. Ook de opstaande ribben van het prisma hebben een lengte van 6 cm.

figuur 5



Het vlak *BDF* verdeelt het prisma in twee piramides (zie figuur 5).

5p **9** ☐ Bereken de inhoud van de piramide *B.ACFD*. Geef je antwoord in cm^3 nauwkeurig.

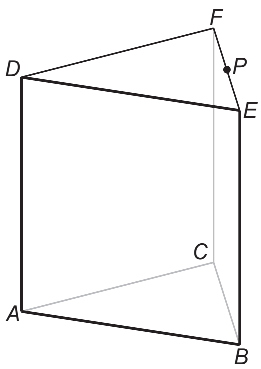
P is het midden van ribbe *EF*. Lijn *AP* snijdt vlak *BDF* in punt *S*.

5p **10** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het punt *S*. Licht je werkwijze toe.

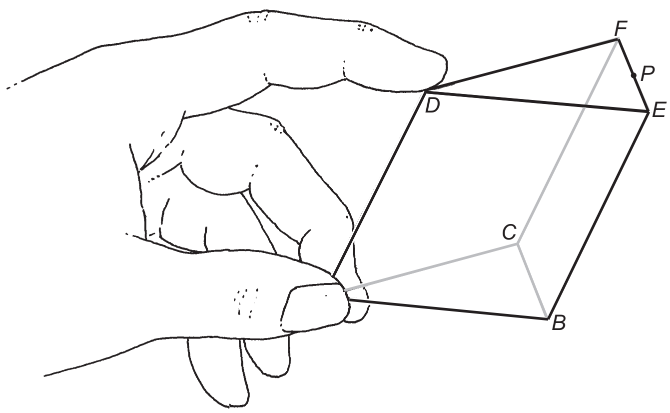
6p **11** ☐ Bereken de hoek die lijn *BD* met vlak *ACFD* maakt. Geef je antwoord in gehele graden.

In figuur 6a is een draadmodel afgebeeld van het beschreven prisma *ABC.DEF*. De stukken draad kunnen scharnieren in de hoekpunten. Door druk uit te oefenen op punt *D* in de richting van punt *P* verandert het rechte prisma in een scheef prisma. De lengtes van de ribben blijven daarbij hetzelfde. Zie figuur 6b. De drie opstaande ribben *AD*, *BE* en *CF* staan nu niet meer loodrecht op de vlakken *ABC* en *DEF*.

figuur 6a



figuur 6b



Men drukt tot de hoogte van het scheve prisma de helft is van de hoogte van het rechte prisma. Op de uitwerkbijlage staat een gedeelte van het bovenaanzicht van het prisma in zijn eindpositie.

6p **12** ☐ Teken op deze uitwerkbijlage op ware grootte het volledige bovenaanzicht van het scheve prisma in de eindpositie. Licht je antwoord toe.

Trillende stemvorken

Bij een stemvork die in trilling gebracht wordt, maken de uiteinden zeer snelle heen en weergaande bewegingen rond de evenwichtsstand. De afstand van een uiteinde tot deze evenwichtsstand heet de uitwijking. De grafiek van de uitwijking y afhankelijk van de tijd t is een sinusoïde. De trilling van de stemvork brengt lucht in trilling. Dit horen wij als geluid.

foto 1

A

foto 2

B

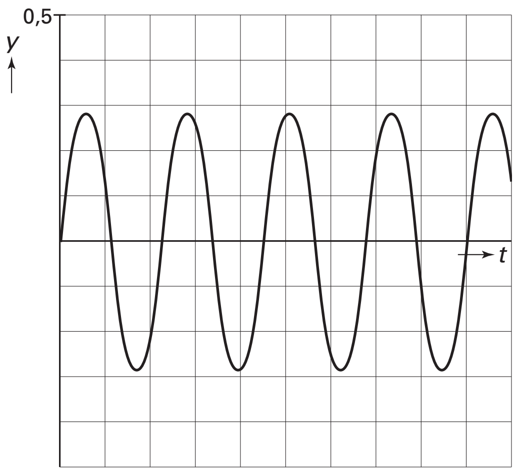
Hierboven staan twee stemvorken A en B afgebeeld.
Met behulp van een oscilloscoop krijgt men de grafiek van het trillingspatroon. In figuur 7 staat de grafiek voor stemvork A.

Bij deze grafiek hoort de formule:

Stemvork A: $y = 0{,}28 \cdot \sin(0{,}88\,\pi\, t)$

Hierin is t de tijd in milliseconden (1 milliseconde is 0,001 seconde) en y de uitwijking in millimeters.
De trilling van stemvork A begint op $t = 0$.

figuur 7



4p **13** ☐ Bereken het aantal trillingen per seconde voor stemvork A.

Als de frequentie groter wordt, wordt de toon hoger.
Als de amplitude (maximale uitwijking) groter wordt, wordt het geluid harder.

Voor stemvork B geldt de formule:

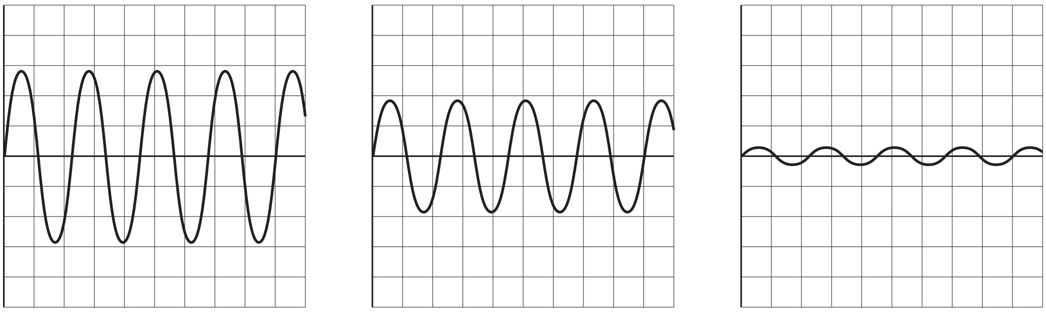
Stemvork B: $y = 0{,}14 \cdot \sin(0{,}88\,\pi\,(t - 0{,}5))$

De beide stemvorken klinken dus even hoog, maar stemvork B klinkt zachter dan stemvork A.
Een derde stemvork C:
- klinkt hoger dan de stemvorken A en B;
- klinkt harder dan stemvork B, maar zachter dan stemvork A.

3p **14** ☐ Stel een formule op voor de trilling van stemvork C.

Na het in trilling brengen wordt het geluid van een stemvork langzaam zachter. De frequentie van de trilling verandert hierbij niet, maar de amplitude neemt geleidelijk af. Op het scherm van een oscilloscoop is dit te zien.

figuur 8



figuur 8a figuur 8b figuur 8c

In figuur 8a is het scherm van de oscilloscoop te zien vlak nadat stemvork A op tijdstip $t = 0$ in trilling is gebracht.
In figuur 8b zie je het scherm van de oscilloscoop na ongeveer 5000 milliseconden. Duidelijk is te zien dat de amplitude nu kleiner is.
Weer enige tijd later ziet het scherm van de oscilloscoop er uit als in figuur 8c. De amplitude is nu $\frac{1}{10}$ van de oorspronkelijke amplitude.
Bij de grafiek hoort de volgende formule:

$y = e^{-0{,}0001t} \cdot 0{,}28 \cdot \sin(0{,}88\pi t)$ met t in milliseconden en y in millimeters.

5p **15** ☐ Onderzoek hoeveel seconden na het begin van de trilling het scherm van figuur 8c te zien is. Rond je antwoord af op gehele seconden.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

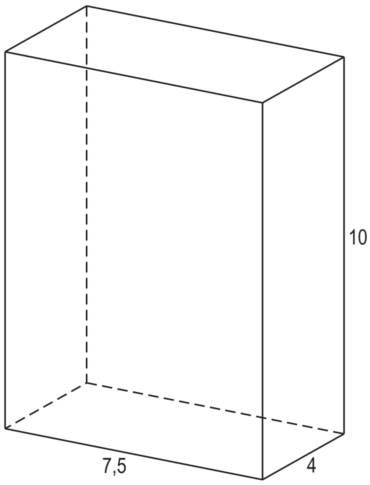
Warmtebalans

De temperatuur van een gekoeld pakje of blikje frisdrank stijgt op een zonnig strand snel. Dit heeft verschillende oorzaken. We beperken ons in deze opgave tot de oppervlakte en het volume van de verpakking.
Als een verpakking bij dezelfde inhoud een grotere oppervlakte heeft, zal de frisdrank erin sneller opwarmen. Hiervoor is de warmte-uitwisselingsfactor F van belang.

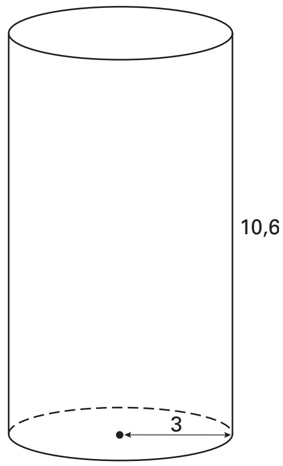
Er geldt: $F = \dfrac{A}{V}$ waarbij A de totale oppervlakte van de verpakking is in cm^2 en V het volume in cm^3.

We bekijken een balkvormige en een cilindervormige verpakking van frisdrank. Zie de figuren 9 en 10. In deze figuren zijn tevens de afmetingen in cm aangegeven.
Voor de oppervlakte A van de cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, waarbij h de hoogte is en r de straal van het grondvlak.

figuur 9



figuur 10



In beide verpakkingen gaat vrijwel dezelfde hoeveelheid frisdrank.
De warmte-uitwisselingsfactor F is verschillend.

6p **16** ☐ Onderzoek welke verpakking de kleinste F-waarde heeft.

Voor een groot koffiezetapparaat moet een cilindervormige tank worden ontworpen met een inhoud van 8 liter (1 liter = 1000 cm^3). Noem de straal van het grondvlak van deze tank r en de hoogte van deze tank h (r en h in cm).

De hoogte h van de tank kun je uitdrukken in de straal r. Er geldt $h = \dfrac{8000}{\pi r^2}$.

Een eis die men aan het ontwerp van het koffiezetapparaat stelt, is dat de hoogte h tussen 20 cm en 40 cm ligt.

5p **17** ☐ Bereken welke waarden voor de straal r dan zijn toegestaan.
Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

In plaats van grenzen aan de hoogte te stellen zou men ook de volgende eis kunnen stellen:
"*De afmetingen van de tank moeten zodanig zijn dat de koffie er zo lang mogelijk warm in blijft. Dat wordt bereikt als de warmte-uitwisselingsfactor F van de tank zo klein mogelijk is.*"
Voor de warmte-uitwisselingsfactor van een cilindervormige tank met een inhoud van 8 liter heeft men de formule $F = \dfrac{2}{r} + \dfrac{\pi r^2}{4000}$ gevonden.

5p **18** ☐ Bereken met behulp van differentiëren de straal van een tank die aan deze eis voldoet.
Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

Einde

Toename lichaamsgewicht zwangere vrouw

Een vrouwenarts heeft van een zwangere vrouw gedurende de zwangerschap allerlei gegevens verzameld. In tabel 1 staan enkele resultaten. Daaruit is onder andere af te lezen dat deze vrouw als ze 25 weken zwanger is, sinds het begin van de zwangerschap 3030 gram zwaarder is geworden.

tabel 1

Aantal weken zwanger	15	25	35	40
Toename lichaamsgewicht in gram (afgerond op tientallen)	1520	3030	5990	8400

Het verband tussen het aantal weken zwangerschap en de gewichtstoename van deze vrouw is vanaf de vijftiende week bij benadering exponentieel.

4p **1** □ Bereken de groeifactor per week van dit exponentiële verband.
Rond je antwoord af op twee decimalen.

De gewichtstoename van een zwangere vrouw wordt voor een deel veroorzaakt door het gewicht van de ongeboren baby. Onderzoek toont aan dat vanaf week 20 dit gewicht elke week ongeveer evenveel toeneemt.
In tabel 2 zijn gewichten weergegeven van het ongeboren kind van de vrouw van wie de gewichtstoename in tabel 1 staat.

tabel 2

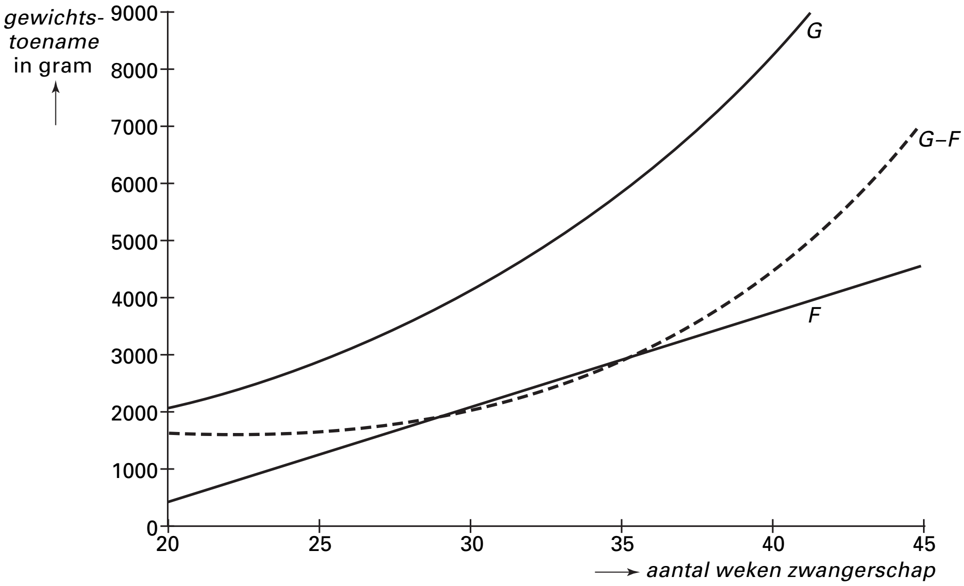
Aantal weken zwanger	20	25	35	40
Gewicht van het ongeboren kind in gram	523	1390	3120	3990

De formule $F = a \cdot t + b$ geeft bij benadering het verband weer tussen het gewicht van het ongeboren kind en de duur van de zwangerschap. Hierin is t de tijd in weken dat de vrouw zwanger is en F het gewicht van het ongeboren kind in gram.

4p **2** □ Bereken a en b met behulp van de gegevens in tabel 2.

Tijdens de zwangerschap van een andere vrouw zijn ook de gewichtstoename van de moeder en het gewicht van het ongeboren kind door de vrouwenarts bijgehouden. De gegevens zijn in formules verwerkt. De bijbehorende grafieken zijn in figuur 1 afgebeeld.

figuur 1



De formules die bij deze zwangerschap horen zijn: $G = 1450 \cdot 2^{0,1t - 1,5}$ en $F = 165t - 2875$.
Hierin is t de duur van de zwangerschap in weken, G de gewichtstoename van de vrouw in gram en F het gewicht van het ongeboren kind in gram.
In figuur 1 is met een stippellijn de grafiek getekend van het verschil van G en F.

Aan het eind van de zwangerschap wordt er veel vocht opgeslagen. Ook neemt het gewicht van de vrouw toe door weefselvorming rond het ongeboren kind. Aan het eind van de zwangerschap kunnen G en F wel 4000 tot 8000 gram verschillen.

5p **3** □ Bereken met behulp van de gegeven formules op welke dag na het begin van de zwangerschap bij deze vrouw dit verschil voor het eerst meer dan 4000 gram is.

De grafiek van F en de verschilgrafiek snijden elkaar voor twee waarden van t. Op deze twee tijdstippen geldt dat G twee keer zo groot is als F.

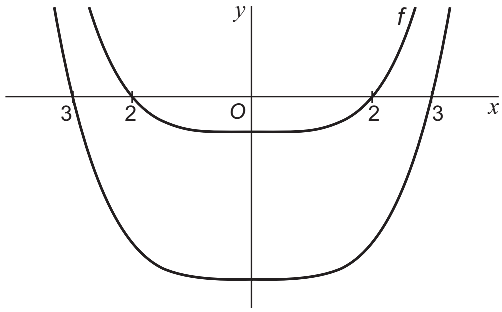
4p **4** □ Beredeneer dit zonder deze snijpunten met behulp van de formules uit te rekenen.

5p **5** □ Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van t de gewichtstoename G van de moeder en het gewicht F van het ongeboren kind even snel toenemen.

Functies

Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - 16$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $(-2, 0)$ en $(2, 0)$. Door de grafiek van f omlaag te schuiven veranderen de snijpunten met de x-as in de punten $(-3, 0)$ en $(3, 0)$.
In figuur 2 zijn de grafiek van f en de verschoven grafiek getekend.

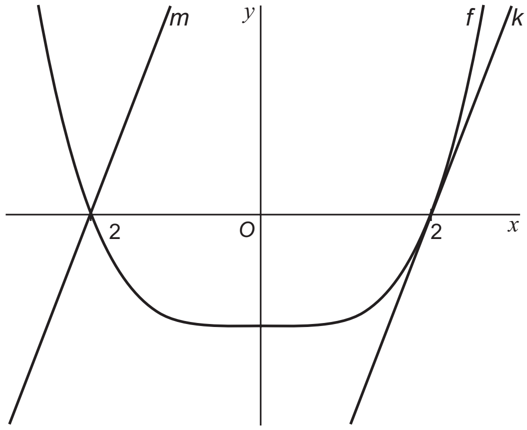
figuur 2



3p **6** ☐ Bereken over welke afstand de grafiek van f in deze situatie omlaag verschoven is.

De raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(2, 0)$ is de lijn k.
De lijn m gaat door het punt $(-2, 0)$ en is evenwijdig aan de lijn k (zie figuur 3).

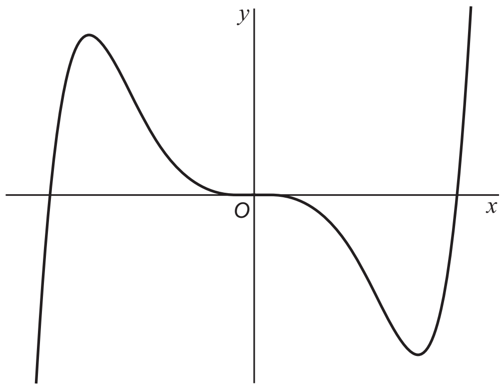
figuur 3



4p **7** ☐ Stel met behulp van differentiëren een vergelijking op van de lijn m.

Door $f(x)$ met x^3 te vermenigvuldigen ontstaat de productfunctie $g(x) = x^3(x^4 - 16)$.
In figuur 4 is de grafiek van g getekend.

figuur 4

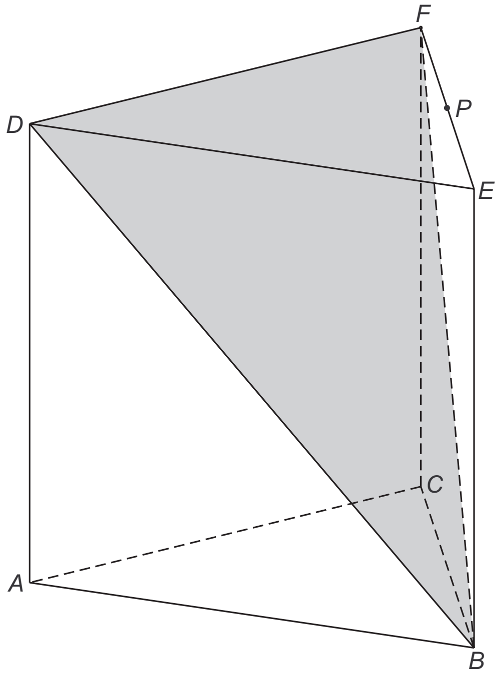


6p **8** ☐ Bereken exact de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van g.

Prisma

In figuur 5 is het prisma *ABC.DEF* getekend. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage. De ribben *AD*, *BE* en *CF* staan loodrecht op de vlakken *ABC* en *DEF*. De driehoeken *ABC* en *DEF* zijn gelijkzijdig met zijden 6 cm. Ook de opstaande ribben van het prisma hebben een lengte van 6 cm.

figuur 5



Het vlak *BDF* verdeelt het prisma in twee piramides (zie figuur 5).

5p **9** ☐ Bereken de inhoud van de piramide *B.ACFD*. Geef je antwoord in cm^3 nauwkeurig.

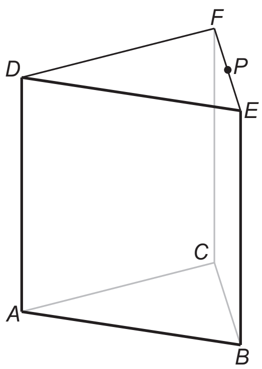
P is het midden van ribbe *EF*. Lijn *AP* snijdt vlak *BDF* in punt *S*.

5p **10** ☐ Teken in de figuur op de uitwerkbijlage het punt *S*. Licht je werkwijze toe.

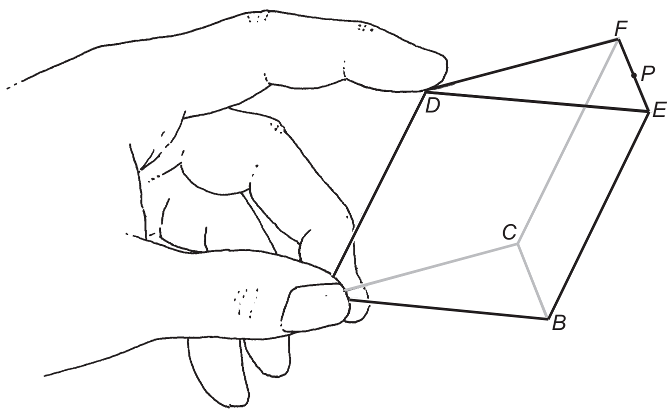
6p **11** ☐ Bereken de hoek die lijn *BD* met vlak *ACFD* maakt. Geef je antwoord in gehele graden.

In figuur 6a is een draadmodel afgebeeld van het beschreven prisma *ABC.DEF*. De stukken draad kunnen scharnieren in de hoekpunten. Door druk uit te oefenen op punt *D* in de richting van punt *P* verandert het rechte prisma in een scheef prisma. De lengtes van de ribben blijven daarbij hetzelfde. Zie figuur 6b. De drie opstaande ribben *AD*, *BE* en *CF* staan nu niet meer loodrecht op de vlakken *ABC* en *DEF*.

figuur 6a



figuur 6b



Men drukt tot de hoogte van het scheve prisma de helft is van de hoogte van het rechte prisma. Op de uitwerkbijlage staat een gedeelte van het bovenaanzicht van het prisma in zijn eindpositie.

6p **12** ☐ Teken op deze uitwerkbijlage op ware grootte het volledige bovenaanzicht van het scheve prisma in de eindpositie. Licht je antwoord toe.

Trillende stemvorken

Bij een stemvork die in trilling gebracht wordt, maken de uiteinden zeer snelle heen en weergaande bewegingen rond de evenwichtsstand. De afstand van een uiteinde tot deze evenwichtsstand heet de uitwijking. De grafiek van de uitwijking y afhankelijk van de tijd t is een sinusoïde. De trilling van de stemvork brengt lucht in trilling. Dit horen wij als geluid.

foto 1

A

foto 2

B

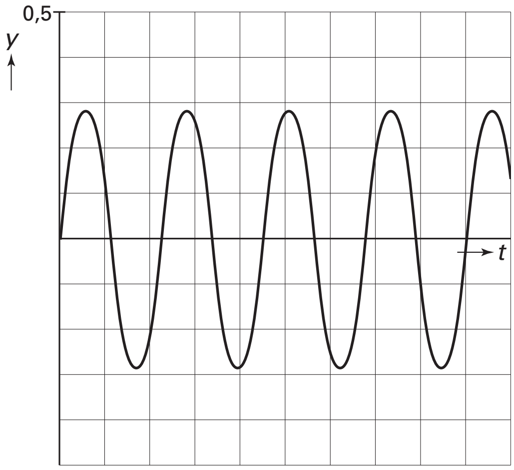
Hierboven staan twee stemvorken A en B afgebeeld.
Met behulp van een oscilloscoop krijgt men de grafiek van het trillingspatroon. In figuur 7 staat de grafiek voor stemvork A.

Bij deze grafiek hoort de formule:

Stemvork A: $y = 0{,}28 \cdot \sin(0{,}88\,\pi\, t)$

Hierin is t de tijd in milliseconden (1 milliseconde is 0,001 seconde) en y de uitwijking in millimeters.
De trilling van stemvork A begint op $t = 0$.

figuur 7



4p **13** ☐ Bereken het aantal trillingen per seconde voor stemvork A.

Als de frequentie groter wordt, wordt de toon hoger.
Als de amplitude (maximale uitwijking) groter wordt, wordt het geluid harder.

Voor stemvork B geldt de formule:

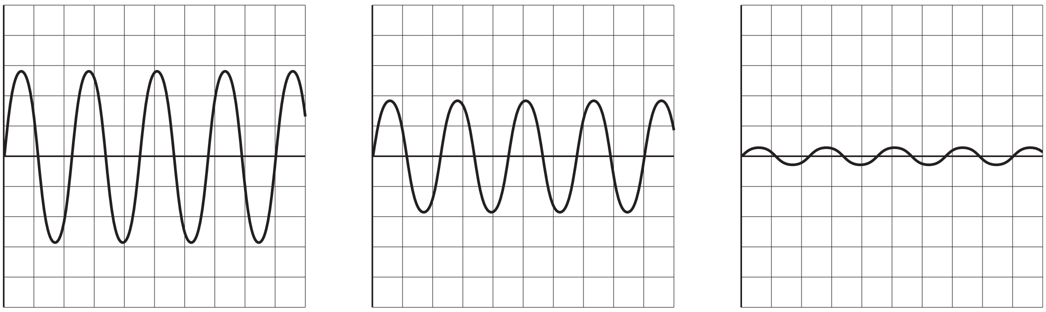
Stemvork B: $y = 0{,}14 \cdot \sin(0{,}88\,\pi\,(t - 0{,}5))$

De beide stemvorken klinken dus even hoog, maar stemvork B klinkt zachter dan stemvork A.
Een derde stemvork C:
- klinkt hoger dan de stemvorken A en B;
- klinkt harder dan stemvork B, maar zachter dan stemvork A.

3p **14** ☐ Stel een formule op voor de trilling van stemvork C.

Na het in trilling brengen wordt het geluid van een stemvork langzaam zachter. De frequentie van de trilling verandert hierbij niet, maar de amplitude neemt geleidelijk af. Op het scherm van een oscilloscoop is dit te zien.

figuur 8



figuur 8a   figuur 8b   figuur 8c

In figuur 8a is het scherm van de oscilloscoop te zien vlak nadat stemvork A op tijdstip $t = 0$ in trilling is gebracht.
In figuur 8b zie je het scherm van de oscilloscoop na ongeveer 5000 milliseconden. Duidelijk is te zien dat de amplitude nu kleiner is.
Weer enige tijd later ziet het scherm van de oscilloscoop er uit als in figuur 8c. De amplitude is nu $\frac{1}{10}$ van de oorspronkelijke amplitude.
Bij de grafiek hoort de volgende formule:

$y = \mathrm{e}^{-0{,}0001t} \cdot 0{,}28 \cdot \sin(0{,}88\pi t)$ met t in milliseconden en y in millimeters.

5p **15** ☐ Onderzoek hoeveel seconden na het begin van de trilling het scherm van figuur 8c te zien is. Rond je antwoord af op gehele seconden.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

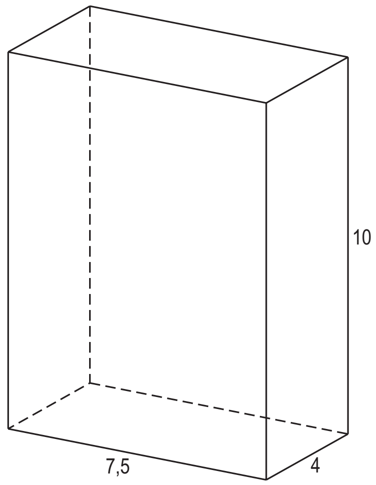
Warmtebalans

De temperatuur van een gekoeld pakje of blikje frisdrank stijgt op een zonnig strand snel. Dit heeft verschillende oorzaken. We beperken ons in deze opgave tot de oppervlakte en het volume van de verpakking.
Als een verpakking bij dezelfde inhoud een grotere oppervlakte heeft, zal de frisdrank erin sneller opwarmen. Hiervoor is de warmte-uitwisselingsfactor F van belang.

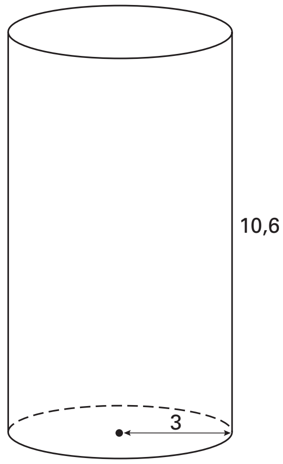
Er geldt: $F = \dfrac{A}{V}$ waarbij A de totale oppervlakte van de verpakking is in cm^2 en V het volume in cm^3.

We bekijken een balkvormige en een cilindervormige verpakking van frisdrank. Zie de figuren 9 en 10. In deze figuren zijn tevens de afmetingen in cm aangegeven.
Voor de oppervlakte A van de cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, waarbij h de hoogte is en r de straal van het grondvlak.

figuur 9



figuur 10



In beide verpakkingen gaat vrijwel dezelfde hoeveelheid frisdrank.
De warmte-uitwisselingsfactor F is verschillend.

6p **16** ☐ Onderzoek welke verpakking de kleinste F-waarde heeft.

Voor een groot koffiezetapparaat moet een cilindervormige tank worden ontworpen met een inhoud van 8 liter (1 liter = 1000 cm^3). Noem de straal van het grondvlak van deze tank r en de hoogte van deze tank h (r en h in cm).

De hoogte h van de tank kun je uitdrukken in de straal r. Er geldt $h = \dfrac{8000}{\pi r^2}$.

Een eis die men aan het ontwerp van het koffiezetapparaat stelt, is dat de hoogte h tussen 20 cm en 40 cm ligt.

5p **17** ☐ Bereken welke waarden voor de straal r dan zijn toegestaan.
Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

In plaats van grenzen aan de hoogte te stellen zou men ook de volgende eis kunnen stellen:
"*De afmetingen van de tank moeten zodanig zijn dat de koffie er zo lang mogelijk warm in blijft. Dat wordt bereikt als de warmte-uitwisselingsfactor F van de tank zo klein mogelijk is.*"
Voor de warmte-uitwisselingsfactor van een cilindervormige tank met een inhoud van 8 liter heeft men de formule $F = \dfrac{2}{r} + \dfrac{\pi r^2}{4000}$ gevonden.

5p **18** ☐ Bereken met behulp van differentiëren de straal van een tank die aan deze eis voldoet.
Rond de getallen in je antwoord af op één decimaal.

Einde