wiskunde B1,2

Examen HAVO

Hoger
Algemeen
Voortgezet
Onderwijs

20 **06**

Tijdvak 1
Vrijdag 19 mei
13.30 – 16.30 uur

Voor dit examen zijn maximaal 87 punten te behalen; het examen bestaat uit 22 vragen. Voor elk vraagnummer is aangegeven hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

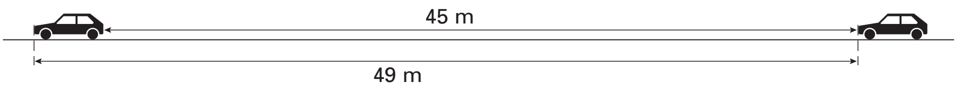
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Verkeersdichtheid

We gaan uit van de volgende (denkbeeldige) situatie (zie figuur 1).
Op een weg rijden auto's met een snelheid van 80 kilometer per uur. De auto's houden een onderlinge afstand van 45 meter. De lengte van een auto is 4 meter. Per auto is dus 49 meter snelweg nodig.

figuur 1



Langs deze weg staan borden met daarop de tekst: "Houd 2 seconden afstand".

3p **1** ☐ Onderzoek of in de gegeven situatie de auto's hieraan voldoen.

De volgende vragen gaan over wegen met veel verkeer.
Als het drukker wordt op de weg, gaan de auto's langzamer rijden en ook dichter op elkaar.
De *verkeersdichtheid*, dat is het aantal auto's per kilometer weg, neemt dus toe.
Voor het verband tussen de snelheid van het verkeer en de verkeersdichtheid stelde de Amerikaanse verkeerskundige dr. Bruce Greenshields in 1935 de volgende formule op:

$$k = k_{max} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{max}}\right)$$

Hierbij is
- v de snelheid van het verkeer in kilometer per uur,
- v_{max} de snelheid van het verkeer in kilometer per uur als men niet door andere automobilisten in zijn snelheid belemmerd wordt,
- k de verkeersdichtheid en
- k_{max} het maximale aantal auto's per kilometer weg.

Bij een gegeven snelheid is de doorstroming q het aantal auto's dat per uur een bepaald punt passeert als ze zo dicht mogelijk op elkaar rijden. Zo dicht mogelijk betekent hier dat de bestuurders de kleinste onderlinge afstand kiezen die nog voldoende verkeersveiligheid garandeert.
Voor q geldt: $q = v \cdot k$.

We gaan uit van de volgende situatie.
Op een weg is v_{max} gelijk aan 88. Het verkeer rijdt achter elkaar aan met een snelheid van 72 kilometer per uur. Alle auto's zijn 4 meter lang. Er passen dus maximaal 250 auto's op een kilometer; in dit geval is k_{max} gelijk aan 250.

3p **2** ☐ Bereken de doorstroming q van deze weg.

De volgende vragen gaan over een snelweg met in beide richtingen twee rijstroken. Op elke rijstrook is k_{max} gelijk aan 250 en v_{max} gelijk aan 160.

Met behulp van de gegeven formules $k = k_{max} \cdot \left(1 - \frac{v}{v_{max}}\right)$ en $q = v \cdot k$ kan afgeleid worden dat voor elke rijstrook van deze weg geldt: $q = 250v - 1{,}5625v^2$.

3p **3** ☐ Toon aan dat deze laatste formule uit de twee andere formules afgeleid kan worden.

De doorstroming q van een rijstrook hangt dus af van de snelheid waarmee gereden wordt.

3p **4** ☐ Bereken met behulp van differentiëren bij welke snelheid q het grootst is.

Windsnelheid en hoogte

Op een bepaalde dag is in Vlaardingen op verschillende hoogtes de windsnelheid gemeten. Uit de meetresultaten blijkt dat er bij benadering een lineair verband bestaat tussen de windsnelheid W in m/s en de hoogte h in meter voor hoogten tussen 10 en 80 meter (zie tabel 1). De formule $W = a \cdot h + b$ geeft dit lineaire verband.

tabel 1

h	10	20	30	40	50	60	70	80
W	1,2	1,6	2,1	2,5	3,0	3,4	3,9	4,3

4p **5** ☐ Bereken a en b met behulp van de gegevens in tabel 1.
Rond a af op drie decimalen en b op twee decimalen.

Onderzoek door weerkundigen naar windsnelheden op verschillende hoogtes en onder verschillende omstandigheden heeft opgeleverd dat het verband tussen windsnelheid en hoogte in het algemeen niet lineair is. Een betere formule is:

$$W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$$

Hierin is:

- W de windsnelheid (in m/s);
- h de hoogte in meter waarop de windsnelheid wordt gemeten;
- m een constante die afhangt van de wrijving tussen de luchtlagen;
- r een constante die afhangt van de ruwheid van het terrein (hoge bomen beïnvloeden de windsnelheid anders dan grasland)

De formule is geldig tot hoogtes van ongeveer 100 meter.

In de praktijk wordt de windsnelheid op een hoogte van 10 meter gemeten. De waarde van r op de meetplek is bekend zodat het getal m met behulp van de formule berekend kan worden. Vervolgens kan met de gegeven formule de windsnelheid op andere hoogtes berekend worden.

Boven open bouwland met $r = 0{,}12$ wordt de windsnelheid gemeten. Op 10 meter hoogte is deze windsnelheid 6,0 m/s.

5p **6** ☐ Bereken in deze situatie de windsnelheid op een hoogte van 60 meter.

Boven een bepaald terrein en met $m = 0{,}45$ geldt het volgende:
de windsnelheid is op 60 meter hoogte 1,3 keer zo groot als op 20 meter hoogte.

4p **7** ☐ Bereken de waarde van r van dit terrein.

Op grotere hoogte geldt het volgende: bij toenemende hoogte neemt de windsnelheid vrijwel niet toe. Met behulp van de helling van de grafiek van W is deze eigenschap te controleren. Neem in de volgende vraag $r = 1$ en $m = 1$.

5p **8** ☐ Toon met behulp van differentiëren aan dat op hoogtes groter dan 90 m de helling van de grafiek van W kleiner is dan 0,028.

In de gegeven formule is de logaritme met grondtal 10 gebruikt. Soms wordt ook wel de natuurlijke logaritme ln gebruikt.

De formule $W = 5{,}76 \cdot m \cdot \log\left(\frac{h}{r}\right)$ kan omgewerkt worden naar een formule van de vorm

$W = a \cdot m \cdot \ln\left(\frac{h}{r}\right)$.

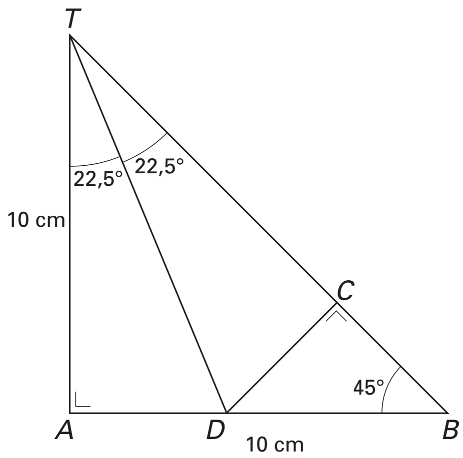
4p **9** ☐ Bereken de waarde van a in deze formule.

Vouwpiramide

Driehoek *TAB* is een rechthoekige, gelijkbenige driehoek. Driehoek *TAB* heeft dus de vorm van een geodriehoek.

$\angle A = 90°$ en $AT = AB = 10$ cm.
Punt *D* ligt op *AB* zo dat lijn *TD* hoek *ATB* in twee gelijke hoeken van 22,5 graden verdeelt.
DC staat loodrecht op *TB*.
In de figuur hiernaast is *AD* dus even lang als *DC*.

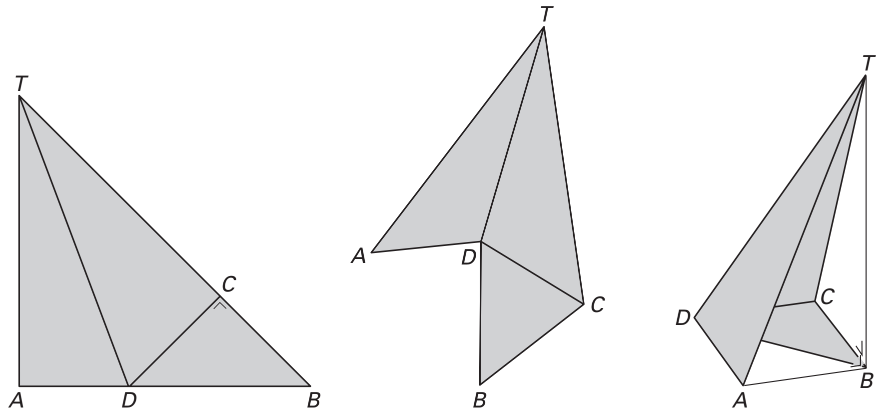
figuur 2



3p **10** ☐ Toon aan dat *BC* ook even lang is als *DC*.

Van een stuk karton met de afmetingen van de driehoek uit deze figuur wordt een ruimtelijke figuur gevouwen. De vouwen lopen langs de lijnen *TD* en *CD*. Hieronder zie je hoe uiteindelijk een deel van de piramide *T.ABCD* ontstaat.

figuur 3



In de laatste figuur zijn de lijnstukken *AB* en *TB* erbij getekend. Het grondvlak *ABCD* is een vierkant. Top *T* ligt recht boven punt *B*. Zo ontstaat een piramide *T.ABCD*.

De oppervlakte van driehoek *TAB* uit de eerste figuur is 50 cm^2. Iemand beweert dat de oppervlakte van de uitslag van de complete piramide het dubbele daarvan is.

4p **11** ☐ Onderzoek of deze bewering juist is.

4p **12** ☐ Bereken de hoek tussen de vlakken *TCD* en *ABCD*.

4p **13** ☐ Bereken de inhoud van de complete piramide *T.ABCD*.

Het punt *M* is het midden van ribbe *AT*. Tussen *M* en *B* wordt een elastiekje gespannen. Als het stuk karton wordt teruggevouwen tot de driehoek van de eerste figuur, wordt het elastiekje uitgerekt.

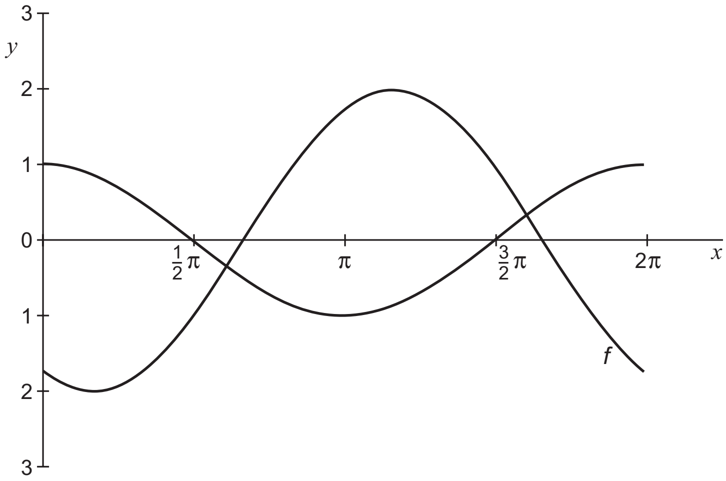
6p **14** ☐ Bereken met welk percentage het elastiekje in de platte toestand (zie eerste figuur) is uitgerekt ten opzichte van de gevouwen situatie van piramide *T.ABCD* (zie laatste figuur).

Sinus en cosinus

Gegeven is de functie $f(x) = -2\sin(x + \frac{1}{3}\pi)$.

In figuur 4 zijn de grafiek van *f* en de grafiek van $y = \cos(x)$ getekend op het interval $[0,\ 2\pi]$.

figuur 4



De grafiek van *f* kan ontstaan uit de grafiek van $y = \cos(x)$ door hierop een verschuiving en een vermenigvuldiging toe te passen.

3p **15** ☐ Schrijf op welke deze verschuiving en vermenigvuldiging kunnen zijn.

Verder is gegeven de functie $g(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

5p **16** ☐ Bereken voor welke waarden van *x* op het interval $[0,\ 2\pi]$ geldt dat $f(x) < g(x)$. Rond de getallen in je antwoord af op twee decimalen.

De grafiek van *g* is een sinusoïde.
Het functievoorschrift van *g* is te schrijven in de vorm $g(x) = a \cdot \sin(x - b)$.

4p **17** ☐ Zoek met behulp van je grafische rekenmachine een waarde van *a* en een waarde van *b* waarvoor dit geldt. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig. Licht je werkwijze toe.

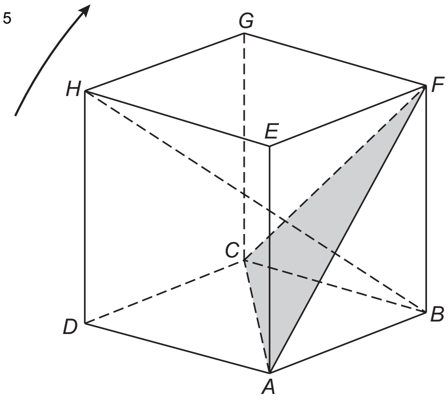
Kubuswoning

Gegeven is een kubus *ABCD.EFGH*. In de figuur hiernaast zijn in deze kubus driehoek *ACF* en lichaamsdiagonaal *HB* getekend.
De lengte van *AF* is 9,80 cm.

Hieruit volgt dat de ribbe van de kubus ongeveer 6,93 cm is.

3p **18** ☐ Toon dit met een berekening aan.

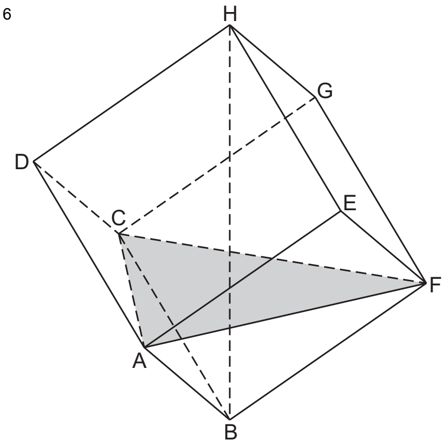
figuur 5



Van de kubus in figuur 5 zijn de ribben *AE*, *BF*, *CG* en *DH* verticaal. De kubus wordt vanuit de stand in figuur 5 gekanteld naar de stand in figuur 6. De lichaamsdiagonaal *HB* komt daardoor verticaal te staan.

3p **19** ☐ Bereken de hoek waarover de kubus gekanteld is.

figuur 6



Driehoek *AFC* snijdt lichaamsdiagonaal *HB* loodrecht en ligt in de stand van de tweede figuur dus horizontaal.
De kubus in deze stand is een model voor een zogeheten kubuswoning.

Driehoek *AFC* stelt een vloer in deze woning voor. De oppervlakte van deze vloer is ongeveer 42 m^2.

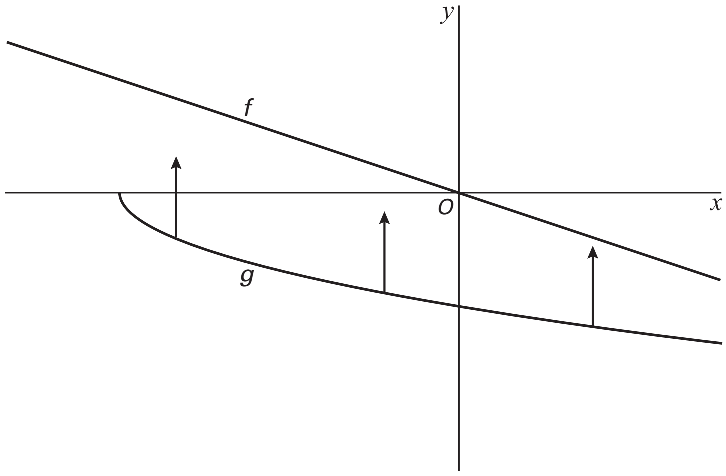
4p **20** ☐ Toon dit met een berekening aan.

Lijn en wortelgrafiek

Hieronder zijn een lijn en de grafiek van een wortelfunctie getekend.
De getekende lijn is de grafiek van de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x$.

De wortelfunctie is $g(x) = -\sqrt{x+9}$.

figuur 7



De grafiek van g wordt 2 eenheden omhoog geschoven. De lijn en de verschoven wortelgrafiek hebben een snijpunt.

4p **21** ☐ Bereken de coördinaten van dit snijpunt.

De functie h wordt gegeven door het product van f en g: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Deze functie heeft een maximum 0 voor $x = -9$.
Verder heeft de functie h een minimum.

6p **22** ☐ Bereken met behulp van differentiëren het minimum van h.

Einde